Enunciação:
Revista do Programa de Pós-Graduação em Filosofia da UFRRJ

Notas sobre quantificação irrestrita e semântica clássica

Notes on unrestricted quantification and classical semantics

André Nascimento Pontes
Universidade Federal do Amazonas – UFAM*

Resumo

Meu objetivo no presente artigo é apresentar o que penso ser as principais objeções à legitimidade de quantificações irrestrita no âmbito de uma lógica e uma semântica clássicas. Minha conclusão aponta para um dilema entre a lógica clássica e a possibilidade de um discurso formal sobre a generalidade absoluta. Da forma como penso, esse dilema impõe importantes consequências para algumas agendas filosóficas.
Palavras-chave: quantificação irrestrita; generalidade absoluta; lógica clássica.

Abstract

My purpose in this paper is to present what I believe to be the main objections to the legitimacy of unrestricted quantifications in classical logic and semantics. My conclusion points to a dilemma between classical logic and the possibility of a formal discourse on absolute generality. As I understand it, this dilemma imposes important consequences for some philosophical agendas.
Keywords: unrestricted quantification; absolute generality; classical logic.

Introdução

É digno de nota que todos os nossos discursos são dotados de um alcance. O alcance, ou grau de generalidade, é uma propriedade do discurso e das asserções específicas que ele contém. Intuitivamente, o alcance do discurso comporta diferentes graus de generalidade. Falamos, por exemplo, de uma generalidade restrita quando o discurso diz respeito a uma totalidade restrita de objetos, ou

*philospontes@gmail.com

ainda, de uma generalidade absoluta quando a totalidade dos objetos do discurso é absolutamente inclusiva. Nesse último caso, nada escapa ao alcance do discurso. Se pensarmos em termos de um discurso formal, a generalidade é expressa por meio de quantificadores. Em verdade, uma quantificação universal é um mecanismo formal a partir do qual expressamos verdades gerais, ou seja, afirmações sobre generalidades. No contexto da semântica estabelecida pela moderna teoria dos modelos, o domínio — ou universo do discurso — é parte estruturante das chamadas "interpretações" dos quantificadores.

Desse modo, existem diferentes graus de generalidade dependendo do alcance pretendido pela afirmação e a esses diferentes graus correspondem diferentes tamanhos possíveis do domínio da quantificação. Na prática, isso opera do seguinte modo. Quando afirmo que "todas as cervejas estão na geladeira" e que "tudo é idêntico a si mesmo" estou, em ambos os casos, expressando algo sobre generalidades, ou melhor, pretensas verdades gerais. No entanto, com a primeira sentença estou, infelizmente, expressando apenas algo sobre uma generalidade restrita. Seria ótimo que todas as cervejas que existem estivessem na minha geladeira, pois eu poderia promover uma festa épica com elas, mas estão na minha geladeira apenas as cervejas de um contexto relevante; por exemplo, as que comprei no supermercado ontem à noite. Já, se os metafísicos estão corretos, na segunda sentença o que está em jogo é uma generalidade absoluta, pois o complemento do universo do discurso é vazio. Nesse segundo caso, o alcance do discurso é ilimitado e a quantificação é dita irrestrita. A sentença em questão pretende expressar que absolutamente tudo é idêntico a si mesmo. Em princípio, não há nada que não satisfaça a afirmação.

De maneira técnica, dizemos que uma quantificação universal é *restrita* quando o domínio associado ao quantificador constituí uma totalidade cujo complemento é não vazio. Em outras palavras, em uma quantificação restrita, há pelo menos um objeto que escapa o domínio do discurso associado ao quantificador e, portanto, esse domínio comporta ou constitui uma generalidade limitada; como ocorre no caso das cervejas em minha geladeira. Desse modo, uma sentença do tipo "Tudo é F" constitui uma quantificação restrita verdadeira na medida em que ela é associada a um contexto C de destaque com complemento não vazio — há pelo menos um item x que não pertence a C — e todo item pertencente a C satisfaz a propriedade F. Nesse caso, a expressão "tudo" percorre um domínio restrito e contextualmente relevante de coisas.

Em contrapartida, uma quantificação é dita *irrestrita* caso o domínio associado ao quantificador constitua uma totalidade igualmente irrestrita. Nesse caso, o uso do quantificador não carrega consigo nenhuma limitação implícita ou explícita ao tamanho do domínio contextualmente relevante de objetos. Podemos dizer ainda que o domínio em questão é absoluto, ou seja, que ele abrange tudo o que há.

Mas o que determina o tamanho do domínio de uma quantificação? É importante aqui destacar que diferentes aspectos — semânticos, pragmáticos, dentre outros — podem agir de modo a restringir ou não o domínio de um discurso determinando assim a quantidade de objetos que este comporta. São esses aspectos que caracterizam o contexto a partir do qual devemos entender as sentenças em geral; e isso inclui obviamente nossas sentenças quantificadas. O contexto é, portanto, um parâmetro imprescindível para a avaliação semântico e/ou pragmática de uma sentença. Um contexto C de discurso que não impõe restrições ao tamanho do domínio de uma quantificação do tipo "Tudo é F" determina também que o domínio associado a essa quantificação possui um complemento vazio; não há nenhum item que não seja compreendido por tal domínio. Podemos ainda afirmar que o alcance do discurso é absoluto e que, caso a sentença seja verdadeira, absolutamente tudo satisfaz a propriedade F. Desse modo, sendo a quantificação universal irrestrita, o tamanho do domínio estabelecido pelo contexto do discurso é uma generalidade absoluta[1].

Tanto a quantificação restrita quanto a irrestrita encontram-se hoje envoltas em grandes disputas lógicas e filosóficas. No que diz respeito à quantificação restrita, dado que existem múltiplas formas de restrição de domínios de quantificação, o grande desafio é estabelecer uma teoria geral que permita explicitar, para cada caso, que tipo de mecanismo de restrição está sendo usado e como esses tipos operam tanto sintático como semanticamente. Como exemplos desses diferentes mecanismos de restrição de domínio de quantificação temos: sortal; pragmático; semântico; etc. Por outro lado, a quantificação irrestrita é fonte de uma polêmica, por assim dizer, ainda mais dramática. Apesar da ausência de uma teoria geral de restrição de domínios de quantificação, ninguém ataca seriamente a credibilidade de quantificações restritas. A ocorrência de tais quantificações é um fato linguístico indisputável. Há um consenso de que quantificações restritas fazem parte da prática linguística cotidiana. No entanto, a semântica padrão dos quantificadores fundada na concepção iterativa dos conjuntos criou obstáculos técnicos fundamentais para o estabelecimento de modelos para quantificações irrestritas. Ao que tudo indica, a semântica padrão dos quantificadores modelada pela teoria dos conjuntos ZFC é incompatível com quantificações irrestritas e com a generalidade absoluta estabelecida pelo suposto domínio dessas quantificações.

Dito de maneira direta, o problema fundamental envolvendo o tópico da quantificação irrestrita é exatamente saber se tais quantificações são de fato pos-

[1] A história da filosofia consagrou a compreensão parmenidiana do Ser como a contraparte metafísica por excelência dessa generalidade absoluta. Ao afirmar "o Ser é; o não-ser não é", Parmênides estava expressando o caráter absoluto do Ser. Absolutamente nada está fora do seu alcance.

síveis. Em resumo, se existem usos de quantificadores em que absolutamente nenhum objeto seja excluído como irrelevante para o contexto do discurso; ou seja, usos em que não se exclua objeto algum do domínio da quantificação. Obviamente, caso a resposta a essa questão seja positiva, a quantificação irrestrita deve expressar uma generalidade absoluta.

Um interessante aspecto formal das expressões quantitativas "todo" e "algum" é que elas podem ser interdefinidas com auxílio da negação clássica; e isso produz um efeito relevante no que diz respeito à quantificação irrestrita. Muitas das expressões que fazem uso de quantificadores e que são tão presentes na lógica formal podem ser reinterpretadas com base em expressões que supostamente envolvam uma quantificação irrestrita: "Nada é um F" é equivalente a "Tudo é não-F"; "Algo é F" pode ser parafraseada como "Não é o caso que tudo é não-F". Em tese, a expressão "tudo" pode ser tomada de maneira irrestrita em todas essas reinterpretações das expressões quantificadas. Desse modo, o proponente de quantificações irrestritas pode alegar que tais quantificações estão presentes — mesmo que tacitamente — em uma vasta porção do nosso discurso cotidiano e de nossas teorias científicas e formais; portanto, nós não podemos ignorá-las.

A questão básica que se põe aqui é a da legitimidade de quantificações irrestritas. Sentenças expressando uma generalidade absoluta são formalmente possíveis? Caso elas sejam impossíveis, quais as consequências básicas para o conhecimento humano? Caso elas sejam possíveis, o que legitima essa possibilidade? É importante notar que respostas a essas questões envolvem uma série de resultados técnicos e, por isso, dificilmente elas poderiam ser formuladas trivialmente. Por exemplo, suplementar uma sentença do tipo "Tudo é F" com a expressão "absolutamente" como em "Absolutamente tudo é F", por si só não torna a sentença em destaque irrestritamente quantificada. Podemos imaginar inúmeros casos onde sentenças deste último tipo podem, ainda assim, ter seu domínio de quantificação restringido por um contexto relevante e não absoluto de discurso. Ao afirmar "Estou sobrecarregado no trabalho. Sou responsável por absolutamente tudo!", temos, implicitamente, uma restrição de domínio do quantificador. Por razões óbvias dadas pelo contexto de proferimento, o falante não quer, com essa afirmação, expressar a ideia de que ele é responsável em absoluto por qualquer coisa que ocorra no universo, mas apenas em um contexto relevante de acontecimentos associados ao seu trabalho. Com isso, responder afirmativamente à questão da legitimidade de quantificações irrestritas envolve muito mais do que o acréscimo trivial do adjetivo "absoluto" às nossas afirmações gerais. Precisamos, fundamentalmente, mostrar que podemos prover modelos formais consistentes para tais quantificações que determinem através de critérios claros em quais situações estamos legitimamente empregando tais modelos.

No presente artigo, pretendo apresentar em detalhes a distinção entre quantificações restritas e irrestritas e mostrar em que contextos teóricos podemos encontrá-las. Além disso, percorro alguns dos argumentos de natureza filosófica e lógica contra a viabilidade das quantificações irrestritas. Tento mostrar, particularmente, que o discurso sobre a generalidade absoluta não pode ser modelado pela nossa usual teoria dos conjuntos ZFC. Para isso, será de fundamental importância apresentar alguns dos resultados técnicos; especialmente o paradoxo de Russell e o teorema de Cantor. Meu objetivo final é revelar o que penso ser um dilema em torno da quantificação irrestrita, a saber, ou aceitamos a lógica e a semântica clássicas e, juntamente com elas, a ideia de que nosso discurso formal é estruturalmente incapaz de dar conta de uma generalidade absoluta, ou priorizamos a discurso sobre esse domínio absoluto e propomos uma lógica alternativa que o comporte.

1 Quantificações restritas e irrestritas: onde encontrá-las?

Uma rápida análise das mais diversas formas da prática linguística revela facilmente que as afirmações sobre totalidades compõem uma parte relevante de nossas descrições da realidade e estão extremamente presentes em nosso discurso cotidiano. Tais afirmações vêm frequentemente acompanhadas de algum tipo de restrição explícita ou implícita da totalidade descrita. Quando, ao entrar em um restaurante, alguém ouve do garçom que "todas as mesas estão ocupadas", esta afirmação é invariavelmente compreendida pelo falante/ouvinte competente da língua como uma afirmação sobre a totalidade das mesas do restaurante em questão e não sobre todas as mesas que existem. Há aqui uma restrição de domínio do discurso determinado pelo contexto do proferimento. Nesse sentido, boa parte da pesquisa desenvolvida pela semântica pragmática e pela chamada teoria dos atos de fala busca oferecer uma abordagem filosófica satisfatória de como os contextos de proferimento determinam o significado de muitos termos linguísticos e, consequentemente, determinam os limites do próprio domínio do discurso.

De forma análoga ao que ocorre nas linguagens naturais, muitas das afirmações realizadas na prática científica e matemática e que podem ser formuladas enquanto afirmações sobre totalidades, possuem também seus próprios mecanismos de restrições da totalidade quantificada. Por exemplo, as afirmações de que "Todo metal dilata quando aquecido" e que "todo número natural maior ou igual a 2 que é divisível apenas por 1 e por si mesmo é dito um número primo" possuem ambas o que chamamos de restrições *sortais*, pois são afirmações sobre a totalidade de um *tipo* ou classe específica de entidades, respectivamente, metais e números. As quantificações restritas cumprem um papel fundamental nas ciências empíricas, pois, invariavelmente, uma lei científica é caracterizada por expressar generalizações sobre a ocorrência de classes de fenômenos específicos, tais como a mudança de estado físico de substâncias a partir da variação de temperatura, a atração que grandes corpos celestes exercem sobre a matéria ao seu redor, dentre outras. Do mesmo modo, generalizações na matemática são quase sempre restritas a classes de entidades matemáticas específicas, tais como conjuntos, séries numéricas, estruturas algébricas, figuras geométricas, dentre outras.[2]

No que diz respeito à lógica, o perfil da semântica padrão tarskiana dos quantificadores desenvolvida ao longo do século xx pareceu apontar frequentemente na direção de quantificações restritas; embora, como Charles Parsons (2006, p. 204) chama atenção, essas restrições ocorram apenas no nível da metalinguagem, ou seja, no nível das interpretações, e não estejam explicitamente expressas nas próprias sentenças. Desse modo, o tratamento técnico dado às quantificações sempre as associam a um *domínio* que, no contexto da abordagem conjuntística da teoria dos modelos é, em geral, entendido enquanto um conjunto constituído pelos itens — que podem ser de diferentes tipos: objetos ou propriedades de diferentes ordens — com os quais o universo do discurso está comprometido. Nesse sentido, a própria distinção entre a lógica de predicados de primeira ordem e lógicas de predicados de ordem superior se faz por intermédio de restrições de domínio de quantificação. No caso da lógica de predicados de primeira ordem o quantificador percorre exclusivamente um domínio de objetos, ao passo que, se as quantificações forem realizadas sobre domínios que também comportem propriedades de objetos, estaremos fazendo quantificações de segunda ordem. Nesse contexto, é fácil perceber que podemos realizar quantificações de diferentes ordens variando o domínio de quantificação e que, em tese, a interpretação do *modus operandi* do quantificador o liga a um domínio específico e restrito.

O panorama apresentado acima revela que a ocorrência e a abrangência das quantificações restritas são inúmeras. No entanto, uma observação mais atenta da prática filosófica e da semântica das linguagens formais, pode revelar outro aspecto de nossas afirmações sobre totalidades. A filosofia e algumas porções

[2] Como Michael Potter chama atenção, a importância e a frequência das restrições de quantificadores em afirmações matemáticas marca a estrutura da própria linguagem usada pelos matemáticos. "Very often the variables that occur in mathematical texts are intended to range over only a restricted class of objects, and in order to aid readability mathematicians commonly press into service all sorts of letters to mark this restrictions: $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{k}$ for natural numbers, $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{w}$ for complex numbers, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, for cardinal numbers, $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{H}$ for groups, etc" (POTTER, 2004, p. 11).

específicas da lógica e da matemática levantam a presunção de realizar também afirmações acerca de *totalidades irrestritas*, ou seja, afirmações sobre aquilo que chamamos de uma *generalidade absoluta*. Em tese, tal discurso diz respeito a absolutamente tudo o que há. Não haveria para tais afirmações gerais nenhuma restrição explícita nem implícita do domínio do discurso. Vejamos como isso ocorre em diferentes campos do conhecimento humano.

Na filosofia contemporânea é comum a descrição da metafísica nos termos propostos por Bradley enquanto um campo de pesquisa marcado pelo "esforço em compreender o universo, não simplesmente de maneira fragmentada ou por partes, mas de algum modo como um todo".[3] Essa ideia expressa a pretensão dos metafísicos de oferecer uma teoria sobre a totalidade do real, ou ainda, sobre os constituintes últimos de absolutamente tudo o que existe.[4] Nesse sentido, a relação entre quantificação irrestrita, generalidade absoluta e a metafísica é de grande destaque, pois, em última instância, podemos compreender a legitimidade de quantificações sobre um domínio absoluto como a condição de possibilidade de uma teoria da totalidade do real.[5]

A ocorrência de quantificações irrestritas parece presente mesmo em afirmações de autores que assumem uma orientação fortemente crítica com relação à metafísica tomada em seu sentido clássico. Em muitas das afirmações de filósofos que rejeitam as pretensões clássicas de descrição dos constituintes últimos da realidade apelando para entidades não materiais, está ainda assim presente a pretensão de uma ontologia naturalizada ou empirista enquanto uma teoria sobre absolutamente tudo o que existe. Esse é claramente o exemplo de Quine. Em *On what there is*, ao responder com o termo "tudo" à pergunta "O que há?", Quine pensava estar respondendo à pergunta ontológica fundamental. No entanto, aparentemente, a pretensão quineana era a de usar o quantifica-

[3]Cf. BRADLEY, 1897.

[4]A correlação entre metafísica e um domínio absoluto é também ressaltado por E. J. Lowe ao defender que a concepção tradicional da metafísica consiste em uma investigação racional, universal e autônoma sobre tudo o que há. Cf. LOWE, 2002, p. 3: "(...) this point merely serves to strengthen the claims of metaphysics to be an autonomous and indispensable form of rational enquiry: because the point is that absolutely everything, including even the status and credentials of metaphysics itself, comes within the purview of the universal discipline which metaphysics claims to be." De modo análogo, em *Process and Reality* Whitehead descreve o empreendimento metafísico — a filosofia especulativa — como fundado em um discurso consistente sobre totalidades: "Speculative Philosophy is the endeavour to frame a coherent, logical, necessary system of general ideas in terms of which every element of our experience can be interpreted. By this notion of "interpretation" I mean that that everything of which we are conscious, as enjoyed, perceived, willed, or thought, shall have the character of a particular instance of the general scheme" (WHITEHEAD, 1978, p. 3).

[5]A metafísica enquanto disciplina está comprometida com questões que não dizem respeito diretamente e nem pressupõe uma totalidade absoluta. Como exemplo dessas questões, temos o problema do livre-arbítrio; o problema mente corpo; a existência de Deus; dentre outros. Essas questões compõem aquilo que comumente é denominado de *metafísica especial* em oposição à metafísica geral e sua pretensão de construir uma teoria sobre a totalidade absoluta da realidade. Obviamente, a metafísica que pressupõe e é afetada diretamente pelo tópico da quantificação irrestrita é a metafísica geral.

dor "tudo" irrestritamente. O contexto associado ao quantificador na resposta de Quine não deve excluir nenhum item como irrelevante ao discurso. Do contrário, haveria algo que escapasse ao domínio do que há, ou seja, haveria algo que não existe. Obviamente, isso seria um contra-senso para Quine.

Para seguir com exemplos sobre ontologias naturalistas, Williamson (2003) chama atenção para o fato de que o *slogan* principal do naturalismo "Tudo é parte do mundo natural" — ou ainda, de maneira resumida: "Tudo é natural" — seria incorretamente compreendido caso o entendêssemos como deixando de lado algum objeto não natural e contextualmente irrelevante para o naturalismo. Um correto entendimento da afirmação do naturalista não pode ser restrito a nenhum domínio contextualmente relevante. Ela deve ser entendida como uma generalização sem nenhuma restrição. O que o lema afirma, em última instância, é que absolutamente tudo é natural, ou seja, que o domínio do que é natural determina ou comporta uma generalidade absoluta. Portanto, ao afirmar "Tudo é natural", o naturalista pretende realizar uma quantificação irrestrita.

Essa relação entre quantificações irrestritas e metafísica é constantemente explorada na literatura sobre ontologias formais. Nesse contexto, Charles Parsons sustenta que a análise da possibilidade de quantificações irrestritas pode oferecer um recurso útil a partir do qual seria possível obter respostas para muitas disputas metafísicas, a exemplo do debate realismo/anti-realismo:

> Metaphysicians differ about what there is. That is neither news nor especially interesting. What seems to me a potential problem is that if our quantifiers can really capture everything in some absolute sense, then some form of what Hilary Putnam calls "metaphysical realism" seems to follow. As I understand it that is that there is some final answer to the question what objects there are and how they are individuated (PARSONS, 2006, p. 205).

Ainda no âmbito da metafísica, David Lewis (1973) defendeu a tese de que a semântica modal que ele propunha só poderia ser satisfatoriamente desenvolvida com base em quantificações irrestritas. Lewis interpretou operadores modais — tais como o de necessidade e possibilidade — como percorrendo um domínio de mundos possíveis ontologicamente existentes à maneira do nosso, ou seja, todos os mundos possíveis são portadores de características espaço-temporais, dotado de seus respectivos habitantes e de objetos em relações. No contexto do realismo modal extremo de Lewis, o domínio do que há excede o domínio do que existe em nosso mundo possível. Não por acaso, a teoria de Lewis é por vezes acusada — embora não de forma justa — de cair em algum tipo de meinongianismo devido sua superinflação ontológica e a possível aplicação da distinção meinongiana entre termos tais como *há* e *existe* aos mundos possíveis lewisianos. Além disso, dado que, pensados conjuntamente, a totalidade dos mundos possíveis compreende tudo aquilo que possivelmente existe, tal domínio seria absoluto. Em uma passagem de *Counterfactuals*, Lewis parece oferecer razões para que a própria disputa entre o atualismo e seu realismo modal extremo possa ser interpretada com base na distinção entre quantificações restritas e irrestritas:

> Our idioms of existential may be used to range over everything without exception, or they may be tacitly restricted in various ways. In particular, they may be restricted to our own world and things in it. Taking them as thus restricted, we can truly say that there exist nothing but our own world and its inhabitants [...]. It would be convenient if there were one idiom of quantification, say "there are ...", that was firmly reserved for unrestricted use and another, say "there actually exist ..." that was firmly reserved for the restricted use (LEWIS, 1973, p. 86-7).

A ontologia de Lewis é superabundante e compreende toda entidade que pertença a pelo menos um mundo possível. Tendo em vista que o agregado de tudo o que há em pelo menos um mundo possível compreende uma generalidade absoluta, a aceitabilidade da semântica modal de Lewis estaria subordinada à legitimidade de quantificações irrestritas.

Do mesmo modo, a formulação e interpretação de princípios lógicos clássicos, a exemplo do princípio de auto-identidade:

$$\forall x\ (x{=}x)$$

ou seja, *tudo* é idêntico a si mesmo, parece apontar fortemente para o comprometimento com uma generalidade absoluta expressa por uma quantificação que, por sua vez, está associada a um domínio irrestrito. Em tal afirmação, o termo "tudo" parece remeter a uma generalidade sem qualquer tipo de restrição. Não importa o que tenhamos em questão como valor da variável da sentença quantificada acima — particulares, sejam eles concretos ou abstratos; propriedades; relações; funções; estados mentais; ficções —, absolutamente tudo é idêntico a si mesmo. Portanto, o domínio que satisfaz o princípio de auto-identidade é o domínio mais abrangente possível, ou ainda, uma generalidade absoluta. O mesmo pretenso caráter de uma quantificação irrestrita pode ser percebido na formulação de importantes propriedades lógicas de relações tal como a simetria da identidade — $\forall x \forall y\ (x{=}y \rightarrow y{=}x)$ — e em negações existenciais em metafísica, a exemplo da rejeição nominalista a universais; $\forall x \neg$(x é um universal), ou seja, nada é um universal. Nas duas quantificações em questão, não parece haver restrições quanto aos objetos que podem figurar como valores das variáveis quantificadas. Novamente, quantificações de tais tipos constituem afirmações absolutamente gerais sobre relações ou propriedades: sejam elas satisfeitas por absolutamente tudo ou, alternativamente, não satisfeitas. Não obstante, em última instância, o alcance do discurso é sempre uma generalidade absoluta.

Outros exemplos podem ser apresentados ainda no campo da lógica, tais como o princípio de não-contradição:

$$\forall x \neg (\mathrm{P}x \bigwedge \neg \mathrm{P}x)$$

bem como na descrição do comportamento lógico do próprio quantificador universal, como em:

$$\forall x (\forall y \mathrm{P}y \rightarrow \mathrm{P}x)$$

Na primeira sentença temos que para absolutamente todo objeto, vale que nunca é o caso que o objeto em questão, sob um mesmo aspecto, satisfaz e não satisfaz uma mesma propriedade. Já a segunda sentença afirma nada mais que, se uma propriedade é satisfeita por absolutamente tudo, então dado qualquer objeto, esse objeto satisfará a propriedade em questão. A mesma pretensão de universalidade irrestrita foi levantada por Quine em sua reconstrução da teoria dos conjuntos conhecida como *New Foundations* onde ele afirma: "The variables are to be regarded as taking as values any objects whatever; and among these objects we are to reckon classes of any objects, hence also classes of any classes" (QUINE, 1953, p. 81).[6]

No que diz respeito ao discurso matemático, as quantificações irrestritas parecem estar comumente associadas ao caráter universal da aplicabilidade da aritmética inúmeras vezes ressaltado pelos matemáticos e filósofos da matemática. Como um exemplo destacável dessa posição, no *Grundlagen* §14, Frege expressa claramente a ideia de que o domínio do que é contável, ou seja, o domínio das verdades aritméticas é "o mais abrangente de todos; pois pertence a ele não somente o que é atual, não somente o que é intuível, mas tudo o que é pensável". Nesse sentido, o domínio de aplicação da aritmética compreenderia uma totalidade irrestrita. Não obstante, é importante ressaltar que, apesar de Frege apontar na direção de uma aplicabilidade universal e absoluta da aritmética, sua posição não está sustentada em uma concepção de lógica e de quantificação em termos da semântica padrão dos quantificadores descrita no capítulo anterior onde quantificações são *relativas* a modelos. Como Shapiro (1991, p. 11) chama atenção, a concepção logicista fregeana da aritmética não pode ser honestamente entendida de um ponto de vista modelo teorético, pois, da forma

[6]Essa tese é também defendida em Quine (1962, p. 69). Tanto os *New Foundations* quanto o *Mathematical logic*, ambos de Quine, são entendidos como reconstruções da teoria dos conjuntos incompatíveis com o sistema ZFC.

como foi concebido, o sistema fregeano era completamente interpretado. Em Frege, não há espaço para uma terminologia não lógica cujos referentes pudessem variar de modelo em modelo. O logicismo de Frege é um bloco robusto firmado em um conjunto de pressupostos filosóficos onde a quantificação irrestrita está associada, em grande parte, ao comportamento das propriedades dentro da hierarquia de níveis implícita[7] em sua obra e não à noção de domínio de quantificação na acepção da semântica de modelos posteriormente desenvolvida pelos lógicos do século xx.

Ainda a respeito das quantificações na matemática, até mesmo Russell, que através do seu paradoxo e inúmeros textos tornou-se um ícone do exército de teóricos contrários a quantificações irrestritas, inicialmente chegou a afirmar nos *Principles of Mathematics* que:

> [. . .] in every proposition of pure mathematics, when fully stated, the variables have an absolutely unrestricted field: any conceivable entity may be substituted for any one of our variables without impairing the truth of our proposition (RUSSELL, 1903, p. 7).

É de amplo conhecimento que Russell mudou de opinião várias vezes ao longo de sua carreira filosófica. Por essa e outras razões, a passagem acima não pode ser usada com credibilidade para criar uma polêmica em confronto com o uso padrão do paradoxo de Russell no debate sobre a quantificação irrestrita. Contudo, as palavras nela contidas é certamente emblemática em expressar o poder de sedução que a universalidade da matemática exerce mesmo em oponentes do discurso sobre a generalidade absoluta.

Tudo o que foi dito até então reforça a importância filosófica do debate acerca da legitimidade de quantificações irrestritas. Há aqui um aspecto fortemente metafilosófico do problema. Uma resposta ao problema da quantificação irrestrita implica inevitavelmente em respostas para inúmeros outros problemas em áreas como a metafísica, a filosofia da lógica, filosofia da matemática, dentre outros. Em última instância, a possibilidade de quantificar sobre um domínio absoluto está diretamente associada às próprias condições de possibilidade de diferentes áreas da pesquisa filosófica. Portanto, parece razoável pensar que diferentes respostas ao objeto de investigação desta tese implicam em diferentes e incompatíveis concepções sobre o que constitui o campo de pesquisa da filosofia e quais seus limites.

[7]Uso aqui a expressão "implícita", pois certamente Frege não desenvolveu uma teoria de tipos tal como Russell o fez em detalhes posteriormente. No entanto, há no sistema fregeano toda a base teórica a partir de onde pode ser pensada uma hierarquia de conceitos. O fato de Frege estar primordialmente preocupado com a fundamentação da aritmética e não com as consequências últimas de sua concepção de lógica contribuiu para o não detalhado desenvolvimento dessa hierarquia de conceitos.

2 O que há de errado em falar sobre absolutamente tudo?

Em princípio, não há nada de errado com o fato de que possamos formular tanto quantificações restritas quanto irrestritas, seja na formulação de nossas teorias de mundo a partir das ciências naturais e filosofia, seja nas nossas linguagens formais — a exemplo da lógica e da matemática —, bem como na nossa prática linguística cotidiana. O panorama apresentado acima parece indicar que essa é uma situação frequente e seria desonesto negar que nosso discurso é, pelo menos *aparentemente*, perpassado por afirmações sobre totalidades restritas e irrestritas. No entanto, é também verdade que muitas de nossas intuições acerca dos fundamentos de práticas linguísticas se mostraram, ao longo do desenvolvimento técnico da filosofia da linguagem, não sustentáveis de um ponto de vista lógico. Em verdade, embora a legitimidade de quantificações restritas pareça ser uma prática linguística inquestionável, restando estabelecer para elas uma semântica bem definida que torne claros os diversos mecanismos de restrições do domínio de quantificação, o quadro de legitimidade que sustenta quantificações irrestritas parece constantemente questionado nos círculos lógicos e filosóficos.

À primeira vista, há dois modos básicos pelos quais quantificações irrestritas podem ser sumariamente rejeitadas:

(i) caso toda quantificação irrestrita envolva algum tipo de contradição e, portanto, resulte sempre em uma falsidade;

ou ainda, por uma via mais extrema,

(ii) caso quantificações irrestritas sejam simplesmente sem significado e, consequentemente, não possua nenhum modelo que as satisfaça.

No entanto, uma observação mais atenta pode facilmente revelar que a estratégia (i) falha diante de argumentos básicos da lógica clássica. Se é verdade que toda sentença S quantificada de maneira irrestrita é falsa, pois implica alguma contradição, então sua negação, $\neg$S, deveria ser verdadeira. Contudo, dado que a negação de uma quantificação irrestrita é também uma quantificação irrestrita, novamente teríamos quantificações irrestritas verdadeiras; o que contraria a afirmação inicial de (i) de que toda quantificação irrestrita é falsa. Com isso, parece razoável pensar que a estratégia (ii) indica a melhor via de argumentação contra o tipo de quantificação em questão. O oponente de tais quantificações teria de mostrar, seguindo uma abordagem semântica da questão, que não há nenhum modelo que possa figurar como domínio de uma quantificação irrestrita e que, portanto, toda quantificação supostamente irrestrita ou é sem significado ou possui, em última instância, algum tipo de restrição implícita. Muitos lógicos e filósofos buscaram obter resultados que mostrassem a ilegitimidade formal do discurso sobre generalidades absolutas através de mecanismos lógicos — especialmente derivados da teoria dos modelos e teoria dos conjuntos — ou por intermédio de intuições filosóficas anti-metafísicas acerca dos limites de uma teoria sobre a estrutura da realidade enquanto um todo.

2.1 Relatividade ontológica, indeterminação semântica e quantificação irrestrita

Seguindo alguns *insights* associados à sua concepção dos fundamentos da lógica e da linguagem, bem como à sua crítica à metafísica, Carnap (1950) acenou fortemente contra a legitimidade de quantificações irrestritas; e o fez de maneira especial através de sua distinção entre dois diferentes tipos de questões de existência, a saber, *questões internas* e *externas*. Em seu apêndice ao *Meaning and Necessity* intitulado "Empiricism, Semantic and Ontology", Carnap definiu uma questão de existência como *interna* caso ela seja formulada dentro de um sistema de referência (*framework*). Ao passo que, se a questão for formulada de uma maneira tal que envolva e suspenda a legitimidade da totalidade do próprio sistema de referência a partir do qual ela é formulada, ela é dita uma questão *externa*. Dessa forma, para Carnap, uma questão como "existem números primos entre 100 e 110?" é uma questão de existência interna formulada a partir do sistema de referência da aritmética e que, portanto, admite uma resposta simples por meio de procedimentos matemáticos de verificação. Por outro lado, uma questão tal como "números existem?" pode tanto ser uma questão interna quanto externa. Caso o que se tenha em mente com a questão é saber se dentro do sistema de referência, ou ainda, do domínio de objetos pressupostos pela matemática, há algum objeto que satisfaça a propriedade de ser um número, então estamos diante de uma questão interna de fácil decisão; a resposta seria um trivial "sim". Não obstante, caso o que esteja em questão seja o estatuto ontológico de coisas como números, ou seja, se eles de fato existem independentemente do nosso discurso matemático, então estamos diante de uma questão externa de existência para a qual não possuímos nenhum mecanismo satisfatório para obter uma resposta. Com isso, Carnap claramente defendeu a ilegitimidade de questões externas de existência relegando-as à categoria de pseudo-questões. De acordo com Carnap, questões metafísicas são exemplos paradigmáticos de questões externas de existência e, portanto, sem solução possível, pois pretendem uma resposta que independa do sistema de referência a partir do qual seus termos mais básicos foram definidos; o que para Carnap é completamente inviável.

De acordo com essa intuição de Carnap, afirmar que toda questão formulada de maneira legítima pressupõe um sistema de referência específico, implica de forma análoga que, toda sentença quantificada dentro de uma teoria deve possuir como domínio o âmbito restrito do sistema de referência assumido pela teoria em questão. Desse modo, uma quantificação irrestrita pressuporia um sistema absoluto de referência ao qual compreendesse uma ontologia de tudo — incluindo o próprio sistema absoluto de referência — e, juntamente com ele, uma resposta final para quais tipos de objetos, propriedades e relações existem enquanto parte desse sistema absoluto de referência. Para Carnap, essa é uma tarefa estruturalmente impossível de ser satisfeita. Não há uma linguagem privilegiada onde ocorram quantificações livres de limitados sistemas de referência.

Similarmente ao que foi defendido por Carnap, também encontramos na obra de Hilary Putnam argumentos contra a existência de um domínio todo inclusivo, bem como uma defesa de que as afirmações dentro de nossas teorias são sempre relativas a um esquema conceitual ou condicionadas aos limites impostos por linguagens específicas a partir das quais nossas teorias são formuladas. Esses esquemas conceituais de Putnam equivalem, em linhas gerais, aos sistemas de referência carnapianos. Embora Putnam tenha mudado algumas vezes de posição sobre muitas questões relevantes em filosofia ao longo de sua carreira, em *The many faces of realism* ele sustenta claramente uma posição relativista à maneira de Carnap. Para usar um exemplo do próprio Putnam (1987, p. 18-19) ao discutir a posição de Carnap, suponhamos que vivemos em um mundo *W* com apenas três objetos particulares x_1, x_2 e x_3. Poderíamos confrontar nossa descrição de *W* com a de um lógico polonês (*Polish logician*) hipotético que, baseado em uma ontologia mereológica, afirma que há em *W* além dos três objetos assumidos incialmente, mais quatro objetos compostos pelas seguintes somas mereológicas: $x_1{+}x_2$; $x_1{+}x_3$; $x_2{+}x_3$; $x_1{+}x_2{+}x_3$. De acordo com Putnam, não há nenhum critério fundamental e significativo para estabelecer qual das duas descrições de *W* está correta. Isso ocorre porque, em última instância, ambas as posições estão corretas relativas a um determinado esquema conceitual. Dado que não há nenhum esquema conceitual independente e mais fundamental a partir do qual todos os outros possam ser avaliados, uma resposta à pergunta sobre quantos objetos existem em *W*, se analisada com a pretensão de independência de esquemas conceituais particulares, é destituída de sentido.

Contra o relativismo de esquemas conceituais de Putnam, Lewis (1984b) defendeu a possibilidade de dar uma resposta a perguntas do tipo mencionado acima para além das limitações impostas por esquemas conceituais particulares ao propor que certas coleções de indivíduos são mais fundamentais ou mais "naturais" que outras. Com isso, os valores semânticos de uma determinada interpretação I possuiriam algum tipo de primazia com relação aos valores de outra interpretação I* caso I fosse mais "natural" que I*. Nesse caso, I estaria em melhores condições de determinar o que existe com relação à I*. No entanto, Lewis não oferece nenhum argumento realmente convincente para mostrar, entre duas linguagens, como podemos decidir qual delas é a mais "natural"[8].

Desse modo, se Putnam estiver correto e não houver como obter uma resposta independente de esquemas conceituais para a questão "O que há?", é sem sentido afirmar a existência de um domínio todo inclusivo ou uma generalidade absoluta independente de esquemas conceituais. Se o argumento de Putnam está correto, não há como uma sentença quantificada de uma teoria qualquer percorrer um domínio absolutamente irrestrito.

2.2 O paradoxo de Skolem e a quantificação irrestrita.

Há ainda outro interessante argumento apresentado por Putnam e endereçado contra a existência de um domínio fundamental e absoluto do discurso que vale a pena ser discutido aqui. Em seu famoso texto *Models and reality*, Putnam (1983) defende que o paradoxo de Skolem pode ser usado para sustentar a tese de que não há um discurso sobre um domínio absoluto. Isso interessa diretamente ao problema da quantificação irrestrita, pois o mesmo *insight* pode ser usado, *mutatis mutandis*, para defender a tese de que toda quantificação expressa na lógica de predicados deve ser restrita. Para uma melhor compreensão do argumento de Putnam é necessário em primeiro lugar uma breve e ligeiramente informal apresentação do teorema de Löwenheim-Skolem.

O que o famoso resultado de Löwenheim-Skolem afirma é basicamente que dado qualquer conjunto Γ de sentenças da lógica de predicados de primeira ordem que é satisfatível em um modelo com cardinalidade infinita, Γ possui um modelo que tem a mesma cardinalidade dos números naturais. Esse resultado também pode ser apresentado em outros termos (MCGEE, 2006, p. 186): o teorema estabelece que, se há um pretenso modelo na linguagem de primeira ordem para um conjunto Γ de sentenças, então há um contável submodelo no qual as mesmas sentenças de Γ são igualmente verdadeiras. A partir desse resultado é possível mostrar que um conjunto de sentenças da linguagem de predicados que possua um modelo cuja cardinalidade é infinita possui, em verdade, mais de um modelo.

De modo geral, o resultado de Löwenheim-Skolem foi — e ainda é — compreendido por muitos como associado a um paradoxo na medida em que ele

[8] Um desafio semelhante a respeito de critérios de decisão sobre diferentes sistemas de referência que descrevem o mesmo conjunto de fatos é enfrentado por Goodman (1983) ao tratar do chamado novo enigma da indução em seu paradoxo das esmeraldas. Contudo, não pretendo desenvolver essas críticas no presente artigo para não me distanciar em demasia do problema da quantificação irrestrita.

apresenta uma surpreendente característica de sistemas formais incompatível com outros resultados já consolidados na lógica clássica. Não obstante, rigorosamente falando, seu aspecto paradoxal é meramente aparente, uma vez que ele não aponta diretamente para uma antinomia, ou seja, uma evidente contradição. Como destaca Bays (2014), o chamado paradoxo de Skolem traz à tona uma incômoda desarmonia entre pelo menos dois importantes resultados amplamente assumidos: o próprio teorema de Löwenheim-Skolem e a prova de Cantor para a não enumerabilidade de determinados conjuntos. Vejamos como essa desarmonia se dá. Por um lado, o teorema de Löwenheim-Skolem afirma que, se a linguagem de primeira ordem tem modelos de cardinalidade infinita, então ela tem modelos cujo os domínios são todos eles contáveis. Por outro lado, o resultado de Cantor sobre a não enumerabilidade de determinados conjuntos infinitos — a exemplo do conjunto dos irracionais e, consequentemente, o conjunto dos reais — prova que alguns conjuntos são não contáveis. O aspecto desconcertante dos dois resultados tomados conjuntamente é que o resultado de Cantor sobre a não enumerabilidade de determinados conjuntos pode ser formulado em linguagem de primeira ordem que, por sua vez, admite modelos contáveis. Desse modo, temos um resultado que afirma a existência de conjuntos incontáveis formulado em uma linguagem apenas de domínios contáveis. Além disso, os resultados de Cantor e de Löwenheim-Skolem são suportados pelos mesmos axiomas da lógica clássica. Tudo isso parece comportar uma aparente e desconcertante incompatibilidade. De agora em diante, quando eu usar a expressão "Paradoxo de Skolem" é a essa aparente incompatibilidade que estarei me referindo.

Para ilustrar o Paradoxo de Skolem, podemos tomar emprestado o exemplo de Bays (2014) dado sua relevância para os objetivos do presente trabalho. Bays destaca o seguinte caso: seja S uma axiomatização em lógica de predicados de primeira ordem da teoria dos conjuntos ZFC. Assumindo a consistência de ZFC, podemos afirmar que S possui um modelo M e, como garante o teorema de Löwenheim-Skolem, M deve ser contável. No entanto, as descobertas de Cantor sobre a enumerabilidade de conjuntos prova que $S \vdash \exists x$ (x é não contável), onde x é um conjunto. Portanto, deve haver algum $m^* \in M$, tal que $M \models$ "m^* é não contável". No entanto, como M é um modelo contável, deve haver apenas um número (quantidade) contável de $m \in M$, tal que $M \models m \in m^*$. Apesar do resultado de Cantor, do ponto de vista da última afirmação, m^* parece ser um conjunto contável; o que contradiz a hipótese inicial de que m^* é não contável. Desse modo, a lógica de predicados de primeira ordem parece não ser capaz de expressar o fato de ZFC conter conjuntos não enumeráveis, ou ainda, não contáveis.

Para compreender a força e a abrangência desse argumento, é importante observar que o fato de escolher ZFC como o sistema em questão juntamente com uma axiomatização S é completamente arbitrária. O que o paradoxo de Löwenheim-Skolem parece induzir é que o mesmo resultado obtido no exemplo de Bays poderia ser obtido em qualquer sistema axiomático para a teoria dos conjuntos que fosse formalizada com base na nossa clássica lógica de predicados de primeira ordem.

Há uma vasta discussão sobe as implicações filosóficas em torno do Paradoxo de Skolem que não pode ser esgotada nos limites do presente artigo, mas alguns pontos merecem destaque. Skolem (1967) parecia entender o resultado de seu teorema, bem como as implicações deste, como uma forte razão para pensar as noções da teoria dos conjuntos como dotadas de uma semântica envolvendo algum grau de *relativismo* sobre domínios e modelos. Sobre esse relativismo, Shapiro afirma de maneira esclarecedora:

> There is uncertainty as to what he [Skolem] meant, but the idea seems to be that there is no absolute, independent (or objective) notion of, say, natural number and cardinality. In other words, Skolem held that no set is infinite or the size of the natural numbers *simpliciter*, but only infinite or the size of the natural numbers relative to domain or model (SHAPIRO, 2000, p. 41).

A mesma linha de raciocínio é seguida por Putnam. A respeito do aspecto paradoxal do resultado de Löwenheim-Skolem, Putnam (1983, p. 421) defende que, embora de um ponto de vista lógico o resultado obtido não seja efetivamente um paradoxo, de um ponto de vista da filosofia da linguagem ele está próximo disso. Para Putnam, o teorema de Löwenheim-Skolem traz consigo importantes implicações para o debate sobre o realismo em filosofia e, consequentemente, para a pergunta de caráter ontológico levantada anteriormente: "O que há?".[9] É basicamente essa forma de entender o problema a partir de seus aspectos semânticos e ontológicos que pretendo explorar aqui. De acordo com Putnam, essa relatividade afirmada por Skolem conta como um argumento em favor de um anti-realismo ontológico na medida em que uma teoria matemática não possui uma interpretação fixa e pré-estabelecida por uma realidade matemática ontologicamente independente. A interpretação da teoria deriva de decisões semânticas tomadas pelo matemático. O resultado de Skolem mos-

[9]Em *Models and Reality*, Putnam (1983, p. 421-2) distingue três formas básicas de responder ao problema do realismo dependendo da postura que assumimos com respeito a noções como as de *verdade* e *referência*: (i) o *platonismo extremo* que assume o papel de poderes não naturais na tarefa de compreender ou acessar diretamente formas transcendentes; (ii) o *verificacionismo* que entende o problema clássico da verdade com uma questão de verificação e prova e, por fim, (iii) o *realismo moderado* que mantém as noções clássicas de verdade, mas não assume nenhum poder de acesso a algo não natural ou transcendental. Ainda de acordo com Putnam, é basicamente contra essa terceira posição que as implicações do teorema de Löwenheim-Skolem se levantam.

tra que isso é o caso pelo menos para a aritmética e a análise quando formulada com base na lógica de predicados.

Quando aplicado ao debate sobre a quantificação irrestrita, o que foi afirmado acima produz interessantes consequências. A ideia básica por trás do *insight* de Putnam poderia ser reconstruída em um argumento que segue o seguinte percurso: partimos da suposição de que nossas práticas linguísticas determinam um modelo cujo domínio seja absoluto. Em seguida, confrontamos essa suposição com o teorema de Löwenheim-Skolem, de acordo com o qual vale a seguinte afirmação: sendo s um conjunto enumerável figurando como o domínio de cardinalidade infinita que compõe um determinado modelo de uma linguagem enumerável, deve haver um contável subconjunto s* tal que s* figura como um "subdomínio" desse domínio s e que fundamenta igualmente nossas práticas linguísticas. Desse modo, caso haja de fato algo como um domínio absoluto que fundamentaria uma quantificação irrestrita, a afirmação de Löwenheim-Skolem deve, em princípio, ser satisfeita para tal domínio e, portanto, deve haver um domínio mais restrito que cumpriria a mesma função do domínio absoluto incialmente postulado. Desse modo, até onde podemos perceber, se essa reconstrução do argumento de Putnam estiver correta, o teorema de Löwenheim-Skolem conta como mais um forte indício de que as pretensas quantificações irrestritas podem ser completamente desqualificadas na lógica de predicados de primeira ordem.

Da forma como penso, esse argumento parece apontar na mesma direção que outros argumentos lógicos que apresentarei a seguir. O que há em comum a todos eles é a ideia de que há limitações estruturais internas à própria lógica clássica e à semântica padrão associada a essa lógica que depõem contra a formulação de quantificações irrestritas no seio de nossas teorias formais. Se meus objetivos forem cumpridos com sucesso, essa impossível convivência entre a lógica clássica e as quantificações irrestrita ficará ainda mais evidente até o fim deste artigo.

***

Tendo feito essa revisão dos argumentos de Carnap e Putnam que levantam respeitáveis desafios à quantificação irrestrita e à generalidade absoluta, algumas objeções podem ser levantadas para manter o debate aquecido.[10] Por exemplo, no que diz respeito à discordância sobre quantos objetos uma determinada ontologia afirma existir, tal como é posto na disputa envolvendo a ontologia mereológica do hipotético lógico polonês mencionado acima, há sérias suspeitas sobre até onde o argumento apresentado de fato afeta a credibilidade

[10]Uma discussão crítica mais detalhada dos argumentos de Carnap e, especialmente, de Putnam pode ser encontrada em Inwagen (2002).

metafísica de uma generalidade absoluta. Com razão, Rayo e Uzquiano (2006, p. 9) chamam atenção para o fato de que a discordância entre quem defende que há três objetos e quem defende que há sete objetos em W, como foi exposto no exemplo acima, expressa muito mais uma incompatibilidade linguística do que confirma a inexistência metafísica de uma totalidade irrestrita. Para eles, os defensores das duas posições discordam em suas compreensões de conceitos como *existência* e *objeto*. Consequentemente, seus quantificadores percorrem diferentes domínios ao descrever a mesma porção da realidade. Tal situação parece implicar a tese linguística de que nossos quantificadores não são unívocos e envolvem, em algum grau, a indeterminação semântica que é tão cara à posição relativista. No entanto, não necessariamente isso descredencia a tese metafísica da existência de uma totalidade irrestrita.

De minha parte, não estou convencido de que a objeção destacada por Rayo e Uzquiano possa reabilitar a legitimidade de quantificações irrestritas contra as críticas de Carnap e Putnam. Como penso ter deixado claro, o objetivo fundamental do meu trabalho é o de avaliar a legitimidade de quantificações irrestritas. Se tais quantificações são entendidas a partir da semântica padrão dos quantificadores descrita no primeiro capítulo, elas devem pressupor o acesso e o controle linguístico e técnico de uma generalidade absoluta entendida enquanto um conjunto de tudo o que há. Nesse contexto, alguém pode alegar que mesmo que a tese metafísica que sustenta a existência da totalidade irrestrita ou generalidade absoluta esteja correta, ainda assim nossas quantificações, enquanto construções linguísticas, estariam sujeitas às indeterminações semânticas e aos limites dos múltiplos esquemas conceituais descritos por Carnap e Putnam. Nesse sentido, o argumento de Rayo e Uzquiano parece ser muito mais uma defesa da existência metafísica da generalidade absoluta: tal existência independe de nossa capacidade de quantificar sobre ela do mesmo jeito que a existência de uma pedra independe da percepção que tenho dela. No entanto, esse mesmo argumento não parece oferecer por si só nenhuma boa razão para reabilitar a possibilidade técnico-formal de quantificações irrestritas mediante os desafios indicados por Carnap e Putnam.

Antes de passar ao próximo ponto, vale também ressaltar aqui que os argumentos fundados na tese da relatividade ontológica e da indeterminação semântica não figuram como a principal linha de ataque à quantificação irrestrita. Por hora, devo seguir a linha de raciocínio deste artigo de mostrar mais alguns dos principais argumentos contra quantificações irrestritas.

2.3 Os argumentos lógicos contra quantificações irrestritas

Argumentos como os de Carnap e Putnam são certamente respeitáveis e constituem uma importante linha de ataque ao problema da possibilidade de um discurso sobre absolutamente tudo. Isso fica claro ao perceber a influência decisiva que eles exercem mesmo em trabalhos mais recentes. Por exemplo, a estratégia de Carnap de submeter as quantificações de uma teoria a um sistema de referência específico e eliminar questões externas encontra eco em importantes trabalhos apresentados nos últimos anos, tais coma as ontologias relativistas descritas por Burgess (2004) e Stalnaker (2003). No entanto, em virtude de suas consideráveis e sucessivas pressuposições filosóficas, os argumentos de Carnap e Putnam se veem envoltos em inúmeras disputas, havendo, portanto, muito pouco consenso sobre até que ponto eles são efetivos contra a quantificação irrestrita.

Desse modo, grande parte das principais objeções às quantificações irrestritas — e que de certo modo dominam o debate atual sobre o tema —, foram desenvolvidas com um caráter fortemente técnico e dispensam as discussões filosóficas em termos de esquemas conceituais e indeterminação semântica. Tais objeções são, em geral, derivadas no seio da teoria axiomática dos conjuntos e dos paradoxos que lhes deram origem. Elas visam, em última instância, revelar os obstáculos intransponíveis dentro da própria semântica formal com relação à existência de modelos para as quantificações em questão. Nesse sentido, essas objeções de caráter formal estabelecem uma crítica interna, tendo em vista que, na construção dos argumentos contra as quantificações irrestritas, elas não apelam para nenhum aspecto para além daqueles já assumidos pela própria semântica formal.

A abordagem semântica *standard* da linguagem de predicados opera associando a cada item linguístico significativo um item extralinguístico; por exemplo, letras predicativas e relações com conjuntos e constantes individuais com objetos. No que diz respeito ao modo como lidamos com os quantificadores dentro da semântica padrão para a lógica de predicados, há uma tendência entre os oponentes de quantificações irrestritas a interpretar o domínio de uma quantificação enquanto um conjunto que tem como elementos todos os possíveis valores das variáveis quantificadas. Essa tendência está expressa no que Cartwright (1994, p. 7) chamou de *Princípio Tudo-em-Um* (All-in-One Principle) e que, *grosso modo*, pode ser formulado como segue:

> Ao quantificar sobre certos itens assumimos que a totalidade de tais itens compõe um conjunto. Em outras palavras, todo domínio de discurso determina um conjunto composto pelos objetos pressupostos pelo discurso em questão.

Dito claramente, esse modo de lidar com os quantificadores reflete a tese básica de que devemos entender o domínio de uma quantificação como um conjunto que, por sua vez, deve ser entendido como um objeto abstrato. Ocorre que essa interpretação, juntamente com alguns resultados da teoria dos conjuntos, implica uma série de dificuldades lógicas para as quantificações irrestritas. A princípio, uma quantificação pretensamente irrestrita pretende ser uma quantificação sobre um domínio absolutamente abrangente, ou seja, um domínio todo inclusivo. Tal domínio pode ser definido informalmente da seguinte maneira: um domínio absoluto é um objeto maximal tal que todo objeto seja parte componente dele. Como consequência básica do princípio tudo-em-um, esse domínio constitui precisamente o conjunto de tudo o que há, ou seja, o conjunto universo no sentido absoluto. No entanto, de acordo com o *Teorema de Cantor*[11] formulado dentro da teoria axiomática dos conjuntos, não há algo como um conjunto universo, ou seja, não há o agregado maximal de tudo o que existe. O que o teorema de Cantor mostra, basicamente, é o princípio de que, no contexto da nossa teoria iterativa de conjuntos — uma teoria que permite gerar conjuntos de conjuntos a partir de operações específicas — todos os conjuntos são indefinidamente extensíveis. O mecanismo em questão no teorema de Cantor é a operação de potência (*Power Set*) de um conjunto, ou seja, a geração de um conjunto $\wp(\mathrm{S})$ que tem como elementos todos os subconjuntos de um conjunto S qualquer. Ao conjunto $\wp(\mathrm{S})$ chamamos conjunto potência de S. O que Cantor provou foi que não há, para qualquer conjunto, uma função bijuntiva entre os elementos do conjunto em questão e os elementos do seu conjunto potência. Falando em termos mais precisos, a cardinalidade do conjunto $\wp(\mathrm{S})$ pode ser medida pela fórmula $c{=}2^n$, onde n é a cardinalidade do conjunto S e c a cardinalidade de $\wp(\mathrm{S})$. Portanto, a cardinalidade de um conjunto originado pela operação de potência cresce exponencialmente com relação à cardinalidade do conjunto que lhe deu origem. Obviamente, temos que $\mathrm{c}>n$. Uma consequência direta desse teorema é que, se tentarmos aplicar a operação de potência de um conjunto a algo que pressupomos ser o conjunto universo — e não há nada que, em princípio, impeça tal procedimento —, o conjunto derivado dessa operação deve possuir cardinalidade maior do que a do pretenso conjunto universo. Logo, para qualquer conjunto que tomarmos como o conjunto universo, podemos formular um conjunto de maior cardinalidade do que aquela do conjunto a qual aplicamos a operação, ou seja, damos origem a um conjunto que contenha mais elementos que o conjunto universo; o que claramente é um absurdo. Com isso, se o conjunto universo é definido como o conjunto de tudo aquilo que há e todo conjunto é indefinidamente extensível,

[11] Para uma demonstração formal do Teorema de Cantor para o conjunto potência Cf. Pontes (2019).

então não há como formular um conjunto universo. Consequentemente, não há como realizar uma quantificação que pressuponha um domínio irrestrito.

No presente estágio de minha argumentação, estamos historicamente inseridos no contexto da emergência — e da busca por consolidação — da teoria dos conjuntos a partir dos trabalhos de Cantor. Nesse contexto onde a abordagem matemática de Cantor visa consolidação, é bastante compreensível que haja um extremo interesse pela consistência da teoria. Em uma carta a Dedekind de 1899, Cantor menciona dois tipos básicos de totalidades que, em linhas gerais, correspondem às acima mencionadas totalidades irrestritas e restritas; e onde o primeiro tipo de totalidade é claramente tomada como contraditória. Cantor corrobora de maneira explícita a tese da inconsistência de totalidades irrestritas. Isso pode ser percebido como evidente nas seguintes passagens:

> A plurality (*Vielheit*) can be so constituted that the supposition of a "conjoining" (*Zuzammensein*) of *all* its members leads to contradiction, so that it is impossible to conceive of this plurality as a unity, a complete (*fertig*) object. Such pluralities I call *absolutely infinite* or *inconsistent*... As is readily shown, the "totality (*Inbegriff*) of everything thinkable" is such an [inconsistent] plurality. And there are further examples as well. On the other hand, when the totality (*Gesammtheit*) of the members of a plurality can be conjoined without contradiction, so that it is possible for them to be taken together as "one single thing" then I call this a consistent plurality or "set" (*Menge*).[12]

> If we start from the notion of a definite multiplicity (a system, a totality) of things, it is necessary, as I discovered, to distinguish two kinds of multiplicities (...) For a multiplicity can be such that the assumption that *all* of its elements 'are together' leads to a contradiction, so that it is impossible to conceive of the multiplicity as a unity, as 'one finished thing'. Such multiplicities I call *absolutely infinite* or *inconsistent multiplicities*.
>
> As we can see, the 'totality of everything thinkable', for example, is such a multiplicity (...)
>
> If, on the other hand, the totality of the elements of a multiplicity can be thought of without contradiction as 'being together', so that they can be gathered together into '*one* thing', I call it a *consistent multiplicity* or a 'set' (...)

[12]Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Berlin: Springer, p. 443. A passagem em questão foi citada e traduzida por Rescher e Grim (2008). Os grifos não são encontrados no texto original, tendo sido introduzidos aqui por motivo de ênfase.

> Two equivalent multiplicities are either both 'sets' or both are inconsistent. (CANTOR, 1967, p. 114)[13]

Em grande parte, esse modo de pensar a questão diferenciando totalidades consistentes e inconsistentes — esta última expressando a generalidade absoluta — inspirou o que mais tarde caracterizou a distinção de von Neumann entre *conjuntos* e *classes próprias* e foi desenvolvida em teorias alternativas dos conjuntos como a teoria dos conjuntos NBG. O pano de fundo que conduz à rejeição de uma totalidade irrestrita enquanto uma entidade legítima mostra corretamente que entender algo como membro de uma totalidade é entendê-lo como uma unidade. Portanto, se uma totalidade inconsistente não pode ser uma unidade, ela não pode, por consequência, ser membro de nada; inclusive de si mesma.

Outra linha de objeção amplamente sustentada contra a legitimidade de quantificações irrestritas faz uso das consequências que o paradoxo de Russell trouxe à teoria dos conjuntos. Em última instância, o paradoxo de Russell é uma prova da inconsistência da teoria ingênua dos conjuntos com base no uso irrestrito do princípio da compreensão. De acordo com essa concepção ingênua, um conjunto é uma totalidade de objetos agrupados por intermédio de uma determinada propriedade e, de modo inverso, toda propriedade determina um conjunto que caracteriza a extensão da propriedade em questão.

Princípio ingênuo da compreensão: $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \phi(x))$
onde y denota um conjunto e ϕ uma dada propriedade que opera como a condição que deve ser satisfeita para que algo seja membro de y. A correlação entre intensão e extensão estabelecida pelo princípio ingênuo da compressão pode ser enunciada como segue:

$$\phi(x) \mapsto x \in \{x \mid \phi(x)\}.$$

O que Russell mostrou através do paradoxo que leva o seu nome é que, nem todo predicado sintaticamente bem formado expressa um conjunto, ou ainda, que nem toda propriedade passível de ser definida enquanto um predicado da linguagem possui uma extensão legítima, pois alguns predicados e propriedades são paradoxais. Como vimos anteriormente, o exemplo clássico é o polêmico predicado utilizado por Russell na formulação de seu paradoxo, a saber, o predicado definido dentro da teoria ingênua dos conjuntos como "conjunto que não pertence a si mesmo". Em consonância com o princípio ingênuo da compreensão, tal predicado deve expressar uma classe ou conjunto que possui como membros apenas os conjuntos que não contém a si mesmo como elemento. O predicado — ou propriedade — "conjunto que não pertence a si mesmo", embora sintaticamente bem formado, não possui uma extensão e, consequentemente, não expressa nenhum conjunto.

[13]Citado por Priest (2002, p. 122).

Paradoxo de Russell: assuma a existência de um conjunto $R = \{x \mid x \notin x\}$ cujos membros são apenas os conjuntos que não são membros de si mesmos. A demonstração do paradoxo de Russell pode ser dada em poucos passos.

(1) $\exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow \phi(x))$ Princípio ingênuo da compreensão

(2) $\forall x (x \in R \leftrightarrow x \notin x)$

(3) $R \in R \leftrightarrow R \notin R$

Com isso, uma dura crítica sobreveio contra o axioma ingênuo da compreensão, além, é claro, da percepção da necessidade de estabelecer restrições nos procedimentos de geração de conjuntos a partir de outros conjuntos. Como veremos a seguir, tais restrições recaem diretamente sobre a legitimidade do conjunto universo.

Uma forma bem conhecida de eliminar o paradoxo de Russell da teoria dos conjuntos se dá por intermédio da introdução do *axioma da separação*. Em uma teoria dos conjuntos que permita quantificações irrestritas é necessário haver um análogo ao axioma da separação garantindo que temos uma interpretação para todo predicado no domínio de objetos e que, ao mesmo tempo, não conduza a paradoxos tais como o descoberto por Russell. No entanto, como Rayo e Uzquiano (2006, p. 7) chamam atenção, essa não constitui uma das mais atraentes linhas de resposta tendo em vista que o axioma da separação fica fora do que provavelmente são as duas abordagens mais aceitas da noção de conjunto, a saber, a concepção iterativa e a concepção de limitação de tamanho. Além disso, em ambas as abordagens o conjunto universo não constitui um conjunto legítimo.

Tanto o teorema de Cantor quanto o paradoxo de Russell ofereceram uma contribuição fundamental para a concepção de *extensibilidade indefinida* de conjuntos caracterizada no que ficou conhecido como uma teoria iterativa de conjuntos. Em tal teoria é permitida a geração ilimitada de conjuntos por operações definidas dentro da própria teoria de conjuntos; o que inviabiliza a ideia do conjunto universo enquanto um conjunto maximal, absoluto. O próprio Russell (1908, p. 225) ressaltou que essa concepção de conjunto inviabilizaria o discurso sobre totalidades irrestritas ao afirmar: "When I say that a collection has no total, I mean that statements about *all* its members are nonsense".

Para ressaltar mais um argumento, Russell também sustentava a estreita relação entre a impredicatividade e a noção de uma totalidade irrestrita na medida em que a noção de um conjunto que englobe tudo o que há já envolveria a ideia de que essa mesma totalidade irrestrita seria um item da coleção. Para uma melhor compreensão da ideia de Russell se faz importante tecer algumas palavras sobre impredicatividade. Em lógica e filosofia, a impredicatividade é introduzida enquanto uma propriedade de definições e demais expressões linguísticas que, ao apresentarem uma entidade, o fazem pressupondo a totalidade na qual a entidade em questão está inserida. Por exemplo, se apresento Alisson por meio da descrição definida "o aluno mais alto da sala", tal descrição é dita impredicativa na medida em que ela apresenta um indivíduo a partir da totalidade na qual ele está inserido. Do mesmo modo, ao definir o conjunto R de Russell por meio da condição "conjunto que não pertence a si mesmo", temos aqui uma definição impredicativa de R. Poincaré e Russell certamente são citados como os principais teóricos a levantarem a tese de que é o uso de definições impredicativas que conduz nossas teorias a paradoxos.[14]

Retomando a questão: como exatamente a impredicatividade e a noção de uma totalidade irrestrita se entrelaçam? Da seguinte maneira. Do mesmo modo que a impredicatividade presente no predicado "conjunto que não pertence a si mesmo" conduz a um paradoxo, o conjunto universo entendido como uma totalidade irrestrita também traz consigo uma impredicatividade igualmente nociva à consistência da teoria dos conjuntos. Se o conjunto universo — chamemos tal conjunto de U — é o conjunto de absolutamente tudo o que há, e sendo U também um item dessa totalidade irrestrita, ele deve conter a si mesmo; caso contrário, ele não seria o conjunto de absolutamente tudo. Com isso, em princípio, parece impossível apresentar U sem que isso seja também a apresentação, mesmo que implícita, de uma totalidade na qual o próprio item apesentado já esteja nela inserido. Tendo em vista que, como foi dito acima, Russell atribuía o surgimento dos paradoxos ao uso de definições impredicativas, parece razoável que sua posição em favor da eliminação de tais definições venha acompanhada de uma clara rejeição à totalidade irrestrita expressa no conjunto universo. Russell defendia amplamente a necessidade de eliminar a impredicatividade de nossos sistemas formais seguindo o princípio que pode ser expresso na forma do seguinte lema: *se, ao admitirmos que uma dada coleção tem um total, ela teria elementos definíveis apenas em termos desse total, então a coleção não tem um total*. Fica fácil perceber que o suposto conjunto universo é barrado pelas limitações impostas pelo lema acima.

O que parece ter escapado à percepção de Poincaré e Russell em seus diagnósticos do surgimento dos paradoxos é que nem toda definição impredicativa envolve uma circularidade viciosa. Um exemplo é a expressão "o aluno mais alto da sala" mencionada anteriormente. Além disso, e de maneira mais surpreendente ainda, nem todo raciocínio paradoxal envolve necessariamente im-

[14] A crítica à impredicatividade vem costumeiramente acompanhada de algum grau de rejeição ao realismo. Muitas vezes, essa rejeição toma a forma de um construtivismo. Se admitimos que nossas definições *constroem* as entidades definidas, então segue-se que uma definição impredicativa envolveria algum tipo de petição de princípio, na medida em que a construção da entidade pressupõe a existência de uma totalidade onde a entidade construída já deveria estar lá contida. Obviamente, se assumimos uma posição realista na qual a existência de tais entidades independe de nossas definições, o problema da impredicatividade simplesmente se dissolveria. Para uma análise crítica da posição de Russell quanto à impredicatividade vale a pena ler o famoso artigo *Russell's Mathematical Logic* de Gödel publicado da coletânea de Benacerraf e Putnam (1983).

predicatividade ou qualquer tipo de circularidade viciosa. A esse respeito vale a pena conferir o chamado paradoxo linear de Yablo (1993), assim chamado por ser um resultado paradoxal, mas sem circularidade. Embora seja esse um tópico de grande interesse, não entrarei aqui em uma discussão a respeito do paradoxo linear e suas consequências para o debate sobre impredicatividade e paradoxos em geral, pois isso representaria uma digressão excessivamente longa em relação ao meu objetivo principal e tornaria esse trabalho menos claro e diretivo.[15] Continuemos, portanto, na trilha percorrida até o presente momento.

Após a demonstração de seu paradoxo, o próprio Russell tentou revisar os pressupostos básicos da teoria dos conjuntos e, nessa tarefa, encontrou o desafio teórico a partir do qual fez emergir sua crítica ao chamado princípio do círculo vicioso e às definições impredicativas. Os resultados técnicos derivados das investidas de Russell para salvar o logicismo e a teoria dos conjuntos do paradoxo que ele mesmo descobriu ajudaram a compor a *teoria dos tipos lógicos*. Esses resultados foram publicados em *Principles of Mathematics* e, posteriormente, em parceria com Whitehead, foram expandidos e melhor explanados nos *Principia Mathematica*. Contudo, há uma certa discussão sobre até onde Russell foi realmente capaz de eliminar de seu programa as famigeradas definições impredicativas e, consequentemente, a possibilidade de que um resultado paradoxal análogo ao que ele obteve fosse posteriormente descoberto em sua própria obra. Esse receio dos críticos parece textualmente justificado — pelo menos no que diz respeito ao Russell do *Principles* —, na medida em que o próprio Russell (1903, Apêndice B) admite os limites de sua proposta no contexto da obra em questão. Sobre a resistência do paradoxo por ele descoberto, é destacável a sentença de encerramento do *Principles*. Ela parece expressar uma respeitosa devoção de Russell ao resultado paradoxal que ele obteve. Curiosamente, Russell chama atenção ao fato de que seu resultado impõe uma dificuldade fundamental aos nossos propósitos de referência a totalidades.

> [...] it appears that the special contradiction [Russell's paradox] is solved by the doctrine of types, but that there is at least one closely analogous contradiction which is probably not soluble by this doctrine. The totality of all logical objects, or of all proposition, involves, it would seem, a fundamental logical difficulty. What the complete solution of the difficulty may be, I have not succeeded in discovering; but as it affects the very foundations of reasoning, I earnestly commend the study of it to the attention of all students of logic (RUSSELL, 1903, p. 540, Apêndice B).

[15] Uma apresentação bastante didática sobre a noção de impredicatividade e alguns problemas lógicos e filosóficos que a cercam pode ser encontrada em Feferman (2005).

Essa dificuldade em torno da expressão de totalidades constitui um ponto de destaque e de entrelaçamento com os objetivos do presente artigo.

De acordo como McGee (2006, p. 184), embora seja maravilhoso o monumental trabalho contido no *Principia Mathematica*, há ainda uma distância entre o que Russell e Whitehead disseram ter feito e o que eles de fato fizeram.[16] O marketing em torno dos *Principia* é que essa obra provê os fundamentos para toda a matemática clássica, incluindo a análise clássica; tudo isso dispensando definições impredicativas e círculos viciosos. No entanto, McGee chama atenção para o fato de que para obter uma fundação para a análise matemática é preciso o princípio de que toda coleção não vazia de números reais que é limitada acima tem um menor limite superior. Além disso, o menor limite superior é definido em termos da totalidade dos limites superiores; o que pressupõe uma totalidade que inclui a si mesma. Portanto, a definição de um limite superior de uma coleção não vazia de números reais é impredicativa. Apesar da importância da questão, não constitui meu objetivo no presente estágio do meu argumento questionar o sucesso do trabalho de Russell nos *Principia*, mas meramente aplicar o princípio de caridade ao seu diagnóstico de que impredicatividade é a fonte de inúmeros paradoxos conhecidos e verificar todas as consequências desse diagnóstico para a legitimidade da quantificação irrestrita.

É importante ter em mente aqui que, de um ponto de vista histórico, essa linha de argumentação contra quantificações irrestritas fundada em resultados técnicos estabelecidos dentro da lógica teve voz predominante especialmente na primeira metade do século xx. No entanto, embora não mais dotada da hegemonia que já teve outrora, essa estratégia encontra ainda hoje fortes proponentes. Como um atual exemplo de defensor desta linha destaca-se o filósofo Patrick Grim (1991). Em seu livro *The incomplete universe*, Grim utiliza essa estratégia lógica contra a legitimidade de um discurso sobre totalidades irrestritas via paradoxo do mentiroso — que possui, em última instância, a mesma estrutura impredicativa do paradoxo de Russell — e teorema de Cantor. Grim investiga a possibilidade de um discurso sobre uma totalidade irrestrita e sua relação com o teorema de Cantor em inúmeras teorias alternativas de conjuntos, tais como a *New Foundations* e *Mathematical Logic* de Quine, a de Neumann-Bernays-Gödel (NBG), a de Ackermann e a de Kelley-Morse. De acordo com Grim (1991, p. 109), em todos os casos a investigação aponta na direção de uma conclusão negativa: "nenhuma das teorias inspecionadas parece oferecer uma possibilidade de saída".

O exemplo de Grim merece destaque uma vez que sua estratégia de argu-

[16]Para uma apresentação introdutória do programa filosófico executado por Russell e Whitehead nos *Principia Mathematica* cf. Urquhart, Alasdair. "The Theory of Types", in: Griffin, Nicholas (2003) *The Cambridge Companion to Bertrand Russell*, Cambridge: Cambridge University Press. pp. 286-309.

mentação possui algumas interessantes particularidades em comparação às demais críticas à possibilidade da quantificação irrestrita. Grim estabelece uma correlação entre duas importantes noções: a de *conjunto* e a de *verdade*. A ideia básica é que todo conjunto é formado enquanto um agregado de verdades e, em última instância, o próprio conjunto expressa também uma verdade para além de cada verdade particular que ele comporta. Para Grim, essa correlação entre conjuntos e verdades nos é intuitivamente dada pelo princípio da compreensão. Dada uma condição qualquer, por exemplo, "ser uma vogal", a ela está associado um conjunto $V = \{x \mid x \text{ é uma vogal}\}$ onde cada instância $x \in V$ de satisfação da condição em questão expressa uma verdade, a saber,

a é uma vogal" é uma verdade;

e é uma vogal" é uma verdade;

$\vdots$

u é uma vogal" é uma verdade.

Por sua vez, o próprio conjunto V expressa uma verdade, a saber, que essa é a totalidade das vogais. A totalidade de ocorrências verdadeiras de "α é uma vogal" onde α é uma constante individual cujo item referido por α satisfaz a condição de ser uma vogal compõe aquilo que podemos chamar de conjunto de verdades com respeito à V. Portanto, V, enquanto uma totalidade restrita, opera de maneira similar a uma cláusula de fechamento que afirma verdadeiramente que isto é tudo que é uma vogal.

Nesse sentido, Rescher e Grim (2008, p. 422-3) chamam atenção para o fato de que o mesmo resultado obtido por Cantor com relação à extensibilidade indefinida de conjuntos pode ser, em linhas gerais, obtido com relação a outras totalidades tais como a de verdades, de proposições, de fatos e de estados de coisas. Tomemos como exemplo o caso da totalidade de todos os fatos. Rescher e Grim (2008, p. 422-3) iniciam o argumento supondo que haja o conjunto F* de todos os fatos. Esse conjunto possui um conjunto potência $\wp$(F*) composto por todos os subconjuntos F*s* da totalidade dos fatos. No entanto, cada subconjunto F é ele mesmo um conjunto de fatos e, portanto, a ele está associado também um fato [por exemplo, que F é composto pelos fatos tais e tais]. Dado o teorema de Cantor, não há uma correspondência um-a-um entre F* e os fatos elencados pelo conjunto $\wp$(F*). Dito de maneira mais precisa, haverá mais fatos em $\wp$(F*) que em F*; o que é uma contradição, dado que definimos inicialmente F* como o conjunto de todos os fatos.

No que diz respeito ao conceito de verdade, há ainda outros argumentos não diretamente associados ao teorema de Cantor que visam mostrar a impossibilidade de lidar tecnicamente com o domínio de todas as verdades. Do mesmo modo que é perfeitamente aceitável a existência de verdades ainda não conhecidas, sabemos hoje que há verdades que não podem ser demonstradas em nenhuma linguagem enumerável; a exemplo do que mostra os resultados de Gödel com relação à incompletude da aritmética. Além disso, alguns filósofos argumentam no sentido de mostrar que a hierarquia de linguagens estabelecida por Tarski (2006), possui também efeitos restritivos quanto a possibilidade de construir uma afirmação absolutamente geral, pois, caso fosse possível, esta deveria implicar a ideia de que se está simultaneamente afirmando algo tanto sobre a linguagem-objeto quanto sobre os inúmeros níveis metalinguísticos; o que não é legítimo nos quadros estabelecidos por Tarski. Tudo isso parece impor limitações à nossa capacidade de lidar de maneira técnica com o domínio de todas as verdades a partir de um sistema formal.

Dado todo o contexto apresentado acima, parece ser uma consequência básica dos nossos padrões de raciocínio sobre totalidades que qualquer tentativa de construir uma teoria de tudo fundada na ideia de uma generalidade absoluta, ou ainda, uma totalidade irrestrita — seja qual forem os itens mais elementares assumidos por tal teoria: conjuntos, fatos, proposições, estados de coisas, dentre outros —, essa tentativa passa igualmente pelas restrições das totalidades irrestritas estabelecidas inicialmente pelo teorema de Cantor. Se não há algo como o conjunto universo, não há algo como uma generalidade absoluta.

No que diz respeito à teoria dos conjuntos, é importante destacar que a limitação quanto ao discurso sobre totalidades irrestritas não é o único desconforto que ZFC enfrenta. É bastante comum a discussão sobre a independência que importantes princípios assumidos em ZFC possuem com relação à teoria enquanto tal. Exemplos destacáveis disso são o *axioma da escolha* e a *hipótese do continuum*. Curiosamente, nem a afirmação nem a negação desses princípios podem ser provados a partir da axiomatização de ZFC. De certo modo, esses princípios possuem, pelo menos de maneira indireta, uma relação com a discussão sobre o tamanho que os domínios de uma quantificação podem ter em uma semântica fundada nos termos de ZFC. Isso porque o axioma da escolha e a hipótese do continuum são afirmações, respectivamente, sobre nossa capacidade de produzir novos conjuntos a partir de conjuntos previamente dados e sobre a cardinalidade de conjuntos infinitos.[17]

Em meio a tudo isso, falta ainda tratar de uma importante relação cuja descoberta foi grandemente motivada pelos avanços da teoria axiomática dos conjuntos e sua concepção iterativa, a saber, a rejeição da generalidade absoluta e a extensibilidade indefinida de determinados conceitos. Nesse contexto, Michael Dummett certamente foi um dos filósofos que mais contribuíram para trazer à tona essa relação. A seguir, apresentarei, em seus traços gerais, a abordagem

[17]Para discussões mais aprofundadas sobre a hipótese do continuum seja em seus aspectos mais técnicos, seja em suas consequências filosóficas Cf. Cohen (1966) e Smullyan e Fitting (1966).

que Dummett oferece à extensibilidade indefinida.

3 Dummett sobre extensibilidade indefinida de conceitos

Dummett foi, sem dúvida alguma, um dos grandes expoentes do uso da extensibilidade indefinida da concepção iterativa de conjuntos como estratégia contra a legitimidade de quantificações irrestritas. De acordo com Dummett, um conjunto que é indefinidamente extensível expressa a extensão de um conceito com característica semelhante. Essa tese pode ser verificada na seguinte passagem:

> A concept is indefinitely extensible if, for any definite characterization of it, there is a natural extension of this characterization which yields a more inclusive concept; this extension will be made according to some general principle for generating such extensions, and, typically the extended characterization will be formulated by reference to the previous unextended characterization (DUMMETT, 1978, p. 195-6).

Ainda nesse contexto, Dummett (1991, p. 316) sustenta também a posição de que os paradoxos envolvidos na disputa em torno da legitimidade de quantificações irrestritas não implicam a inconsistência das extensões de determinados conceitos, mas, antes, revelam a importante característica de que os conceitos em questão são indefinidamente extensíveis, ou seja, que as extensões desses conceitos podem ser sempre ampliadas por algum princípio cumulativo. É precisamente isso que destacam o paradoxo de Russell e o teorema de Cantor com relação à noção de conjunto e o paradoxo de Burali-Forti com relação à noção de número ordinal. Nesse sentido, tais paradoxos podem ser interpretados enquanto provas da infinita extensibilidade de determinados conceitos. Seguindo um raciocínio similar ao apresentado por Dummett (1991, p. 316-9), podemos definir um conceito como indefinidamente extensível do seguinte modo:

> ***Definição*** Um conceito P é indefinidamente extensível caso haja um "princípio de extensão" que, quando aplicado a qualquer totalidade definida t de objetos que satisfazem P, produza um objeto que também satisfaz P, mas que não é membro de t.

No que diz respeito à teoria dos conjuntos, essa intuição está inteiramente associada à nossa concepção iterativa estabelecida em ZFC. No teorema de Cantor, o princípio de extensão é dado pela operação de potência de conjuntos, onde para cada conjunto podemos obter o conjunto das partes desse conjunto que contém membros que não pertencem ao conjunto inicial.

Dummett (1991, p. 319) afirma ainda que, pelas razões mencionadas ao longo deste artigo a respeito da semântica dos quantificadores, sentenças quantificadas de maneira irrestrita — enquanto quantificações sobre um domínio indefinidamente extensível — não podem ter condições de verdade determinadas nos mesmos termos da semântica clássica, onde o domínio da quantificação está ontologicamente pré-estabelecido; algo como o infinito atual discutido em filosofia da matemática. Em verdade, quantificações irrestritas devem ser compreendidas sempre em associação a um procedimento efetivo de extensão do domínio associado ao quantificador e, portanto, só podem ser satisfatoriamente interpretadas através de uma semântica construtivista. A posição de Dummett pode ser sintetizada através da seguinte passagem:

> Quantification over the objects falling under an indefinitely extensible concept obviously does not yield statement with determinate truth-conditions, but only ones embodying a claim to be able to cite an instance or an effective operation; and the logic governing such statement is not classical, but intuitionistic. Adoption of such a solution therefore entails a revision of mathematical practice in accordance with constructivist principles (DUMMETT, 1991, p. 319).

Contudo, como fica claro ao final desta última passagem, a proposta de Dummett carrega o que para muitos é um alto e incômodo preço de abdicar da lógica clássica em favor de uma lógica intuicionista. Aqueles que dizem *alto* e *incômodo* preço alegam que, à primeira vista, essa mudança de perspectiva possa parecer mera matéria de disputa filosófica, mas, no que diz respeito às quantificações realizadas, por exemplo, na prática matemática, significaria uma completa revisão de um conjunto enorme de resultados que foram provados com base em princípios lógicos que não são intuicionisticamente aceitos.

De acordo com Dummett (1981, p. 567), os paradoxos da teoria dos conjuntos nos ensinaram a lição de que não devemos interpretar variáveis individuais e quantificações à maneira de Frege, ou seja, que os domínios de quantificações não podem cobrir ou percorrer simultaneamente a totalidade irrestrita de objetos representados significativamente pelas variáveis. A abordagem conjuntística da semântica para a lógica de predicados impõe sempre o uso de domínios restritos. Para fundamentar sua posição, Dummett (1981, p. 569-70) defendeu que cada domínio associado a variáveis individuais constitui a extensão de algum termo geral substantivo (*substantival*). Em outras palavras, isso equivale a dizer que todo domínio de quantificação possui uma restrição sortal estabelecida pelo termo substantivo associada ao quantificador. Para Dummett, um termo geral é dito substantivo caso ele ajude a estabelecer critérios de identidades que permitam a reidentificação de suas instâncias e, portanto, possibilite a diferenciação delas com relação a outras entidades que não instanciam o mesmo termo em questão. É importante destacar que Dummett utiliza aqui a noção fregeana de critério de identidade apresentada em *Grundlagen* §66 de acordo com a qual um critério de identidade deve prover o indivíduo de meios de reconhecer um objeto novamente como o mesmo em diferentes contextos. Como Rayo e Uzquiano (2006, p. 12) chamam atenção para o fato de que, de acordo com Dummett, ao prover critérios de identidade, um termo geral substantivo *F* proporciona meios para responder a questão "Quantos objetos *Fs* essa sala contém?", por exemplo, "Quantas janelas esta sala contém?". Um termo geral não substantivo tal como "coisa" não permite uma resposta direta — livre de divagações e pressuposições metafísicas — à pergunta "Quantas coisas há nesta sala?".

Desse modo, se Dummett está correto em sua avaliação, não seria viável uma quantificação irrestrita, pois uma quantificação de tal tipo pressuporia um domínio absoluto que operasse com relação a termos gerais absolutamente inclusivos tais como "coisa", "objeto" ou "particular" como se eles fossem termos gerais substantivos, ou seja, dotados de critérios de identidade bem definidos; o que de fato não ocorre. Com isso, Dummett pensou ter oferecido um razoável argumento para mostrar que na semântica clássica toda quantificação deve estar invariavelmente vinculada a um termo geral substantivo para que ela seja significativa. Consequentemente, toda quantificação deve ser restrita através de parâmetros sortais. É digno de nota que grande parte dessas afirmações é apresentada por Dummett em *Frege: Philosophy of Language* a partir de sua avaliação das teses que Geach sustenta em sua obra *Reference and Generality*. Em linhas gerais, Geach defende a ocorrência de restrições sortais agindo sobre nossas quantificações. Para uma compreensão mais detalhada das teses de Dummett sobre quantificações, sua análise do trabalho de Geach é certamente esclarecedor. No entanto, isso constitui matéria para outro artigo.

4 Considerações finais

Ao longo do presente trabalho, tentei apresentar um panorama geral do problema da legitimidade da quantificação irrestrita no contexto de sistemas formais clássicos como a lógica de predicados e sua semântica estabelecida dentro da teoria dos conjuntos ZFC. Por ter destacado um leque muito extenso de argumentos, muitos deles fundados em pressupostos tão díspares, é recomendável aqui fazer uma síntese do cenário revelado nas páginas anteriores.

Podemos distinguir algumas etapas da argumentação sobre o problema da legitimidade da quantificação irrestrita nos seguintes termos:

i. O problema em questão é basicamente o de saber se existem situações efetivas onde o uso de quantificadores que não carreguem consigo uma restrição nem explícita nem implícita a um domínio contextualmente relevante de objetos. Ao que parece, pelo menos algumas de nossas afirmações teóricas e também do nosso discurso cotidiano pré-filosófico parecem indicar que esse uso é sim pretendido. Ignorar isso seria uma desonestidade intelectual.

ii. Sendo quantificadores — na lógica e na maioria das linguagens naturais — ferramentas para expressar o grau de generalidade de sentenças, de um ponto de vista da semântica formal, o problema é saber se temos os recursos técnicos adequados para expressar verdades absolutamente gerais. Em outras palavras, o problema levantado é o de saber se existe uma semântica formal consistente para os supostos usos irrestritos de quantificadores. Os argumentos lógicos contra a quantificação irrestrita parecem apontar na direção de uma resposta negativa.

iii. De acordo com a *semântica padrão* dos quantificadores dentro da lógica clássica, a resposta quanto à questão do ponto (i) é de fato negativa. Com isso, se ainda pretendemos manter quantificações irrestritas, então é preciso investigar possibilidades que dispensem tal semântica padrão.

iv. Dummett acena de maneira simpática em direção ao intuicionismo, mas outras possibilidades poderiam ser testadas, tais como aquelas que envolveriam teorias paraconsistentes dos conjuntos.

Em linhas gerais, penso que os resultados apresentados acima apontam para um dilema fundamental: ou aceitamos a lógica clássica juntamente com sua melhor semântica e, com isso, aceitamos também que nosso discurso é incapaz de abarcar consistentemente a generalidade absoluta; ou priorizamos o discurso sobre a generalidade absoluta e apontamos nosso barco para outros mares em busca de uma lógica e uma teoria dos conjuntos não clássica que consistentemente dê conta de uma totalidade absoluta. Obviamente, o presente dilema não representa um resultado efetivo enquanto solução do problema de legitimidade das quantificações irrestritas, mas, em primeiro lugar, um programa de estudos ao qual defendo que vale muito a pena percorrer na medida em que dele podemos derivar resultados não só formais, mas filosoficamente relevantes.

Referências

BAYS, T. Skolem' s paradox. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford encyclopedia of philosophy*. [s.n.], 2014. Último acesso em: 13/06/2019. Disponível em: <http://plato.stanford.edu/entries/paradox-skolem/>. 39

BENACERRAF, P.; PUTNAM, H. *Philosophy of mathematics*. 2^a. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. 48

BRADLEY, F. H. *Appearance and reality*. London: S. Sonnenschein, 1897. 30

BURGESS, J. E pluribus unum: plural logic and set theory. *Philosophia Mathematica*, v. 3, n. 22, p. 193–221, 2004. 43

CANTOR, G. Letter to dedekind. In: HEIJENOORT, J. v. (Ed.). *From Frege to Gödel*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967. p. 113–117. 46

CARNAP, R. Empiricism, semantics, and ontology. *Analysis*, v. 4, p. 20–40, 1950. 36

CARTWRIGHT, R. Speaking of everything. *Noûs*, v. 28, p. 1–20, 1994. 43

COHEN, P. *Set theory and the continuum hypothesis*. New York: Dover Publications, 1966. 52

DUMMETT, M. The philosophical significance of Gödel's theorem. In: DUMMETT, M. (Ed.). *Truth and others enigmas*. Cambridge: Harvard University Press, 1978. p. 186–201. 53

DUMMETT, M. *Frege*: philosophy of language. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1981. 54

DUMMETT, M. *Frege*: philosophy of mathematics. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1991. 53, 54

DUMMETT, M. *The seas of language*. Oxford: Oxford University Press, 1993.

FEFERMAN, S. Predicativity. In: SHAPIRO, S. (Ed.). *The oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*. Oxford: Oxford University Press, 2005. p. 590–624. 49

GOODMAN, N. *Fact, fiction, and forecast*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1983. 38

GRIM, P. There is no set of all truths. *Analysis*, v. 44, p. 206–208, 1984.

GRIM, P. *The incomplete universe*. Cambridge, Mass.: MIT Press, 1991. 50

HEIJENOORT, J. v. (Ed.). *From Frege to Gödel*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967.

INWAGEN, P. v. *Ontology, identity, and modality*: essays in metaphysics. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

INWAGEN, P. v. Carnap and the polish logician. *Acta Analytica*, v. 17, n. 28, p. 7–17, 2002. 41

LEWIS, D. *Counterfactuals*. Oxford: Blackwell, 1973. 31, 32

LEWIS, D. *On the plurality of worlds*. Oxford: Blackwell, 1984a.

LEWIS, D. Putnam's paradox. *The Australasian Journal of Philosophy*, v. 62, p. 221–36, 1984b. 37

LEWIS, D. *Parts of classes*. Oxford: Blackwell, 1991.

LOWE, E. J. *A survey of metaphysics*. Oxford, UK: Oxford University Press, 2002. 30

MCGEE, V. There's a rule for everything. In: RAYO, A.; UZQUIANO, G. (Ed.). *Absolute generality*. Oxford: Oxford University Press, 2006. p. 180–202. 38, 50

PARSONS, C. The problem of absolute universality. In: RAYO, A.; UZQUIANO, G. (Ed.). *Absolute generality*. Oxford: Oxford University Press, 2006. p. 203–219. 29, 31

PONTES, A. e. Quantificação. In: *Compêndio em linha de problemas de filosofia analítica*. Lisboa: Centro de Filosofia da Universidade de Lisboa, 2019. p. 1–44. 44

POTTER, M. *Set theory and its philosophy*. Oxford: Oxford University Press, 2004. 29

PRIEST, G. *Beyond the limits of thought*. 2^a. ed. Oxford: Oxford University Press, 2002. 46

PUTNAM, H. Models and reality. In: BENACERRAF, P.; PUTNAM, H. (Ed.). *Philosophy of mathematics*. 2^a. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1983. p. 421–44. 38, 40

PUTNAM, H. *The Many faces of realism*. La Sale, IL: Open Court Publishing Company, 1987.

QUINE, W. v. O. *From a logical point of view*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1953. 33

QUINE, W. v. O. *Mathematical logic*. 2^a edição revisada. New York: Harper & Row, 1962. 33

QUINE, W. v. O. *Ontological relativity and others essays*. New York: Columbia University Press, 1969.

RAYO, A.; UZQUIANO, G. *Absolute generality*. Oxford: Oxford University Press, 2006. 42, 47, 55

RESCHER, N.; GRIM, P. Plenum theory. *Noûs*, v. 42, n. 3, p. 422–439, 2008. 45, 51

RUSSELL, B. *The principles of mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press, 1903. 34, 49

RUSSELL, B. On some difficulties in the theory of the transfinite numbers and order types. *Proceedings of the London Mathematical Society*, v. 4, p. 29–53, 1907.

RUSSELL, B. Mathematical logic as based on the theory of types. *American Journal of Mathematics*, v. 30, p. 222–62, 1908. 47

RUSSELL, B. *Introduction to mathematical philosophy*. London: Allen & Unwin, 1919.

RUSSELL, B. Letter to frege. In: HEIJENOORT, J. v. (Ed.). *From Frege to Gödel*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967. p. 124–5.

SHAPIRO, S. *Foundations witthout foundationalism*. Oxford: Oxford University Press, 1991. 33

SHAPIRO, S. *Thinking about mathematics*. Oxford: Oxford University Press, 2000. 40

SHAPIRO, S. (Ed.). *The oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*. Oxford: Oxford University Press, 2005.

SKOLEM, T. Some remarks on axiomatized set theory. In: HEIJENOORT, J. v. (Ed.). *From Frege to Gödel*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1967. p. 291–301. 40

SMULLYAN, R.; FITTING, M. *Set theory and the continuum problem*. New York: Dover Publications, 1966. 52

STALNAKER, R. C. *Ways a world might be*: metaphysical and anti-metaphysical essays. Oxford: Clarendon Press, 2003. 43

TARSKI, A. O conceito de verdade nas linguagens formalizadas. In: MORTARI, C. A.; DUTRA, L. H. de A. (Ed.). *A concepção semântica da verdade*: textos clássicos de Tarski. São Paulo: Editora Unesp, 2006. p. 19–148. 52

WHITEHEAD, A. N. *Process and reality*. New York/London: The Free Press, 1978. 30

WILLIAMSON, T. Everything. *Philosophical Perspectives*, v. 17, p. 415–65, 2003. 31

YABLO, S. Paradox without self-reference. *Analysis*, v. 53, n. 4, p. 251–3, 1993. 49